Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Départ d'un train à très haute vitesse : équation différentielle, étude de fonction et calcul intégral** (13 questions) — **Page 3**

2. **Obsolescence programmée des smartphones : probabilités conditionnelles, loi binomiale et test d'hypothèse** (13 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btspp.fr/assets/annales/bts-pp/E2 - Mathématiques/2018/BTS PP - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Départ d'un train à très haute vitesse : équation différentielle, étude de fonction et calcul intégral

Un projet de train à propulsion électromagnétique vise une vitesse instantanée de 400 km/h en moins de deux minutes ; sa distance parcourue est modélisée par une fonction. L'exercice étudie cette fonction, puis utilise le schéma d'une pièce de gare symétrique pour calculer une aire.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question A.1°. Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0.

L'équation s'écrit $y' = 0,2y$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions exponentielles $y(t) = ke^{0,2t}$, où k est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t}, \quad k \in \mathbb{R}.$

Question A.2°. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = -15t - 75 est une solution de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

On a $g'(t) = -15$. Alors

$$g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = 3t.$$

La fonction g vérifie donc l'équation différentielle sur son domaine.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> g est une solution de $y' - 0,2y = 3t$.

Question A.3°. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

1. Une solution particulière est $g(t) = -15t - 75$.
2. Les solutions de l'équation homogène associée sont $ke^{0,2t}$.
3. Les solutions cherchées s'obtiennent en ajoutant ces deux expressions.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75, \quad k \in \mathbb{R}.$

Question A.4°. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale f(0) = 0.

Dans la solution générale, la condition $f(0) = 0$ donne $k - 75 = 0$, donc $k = 75$. En remplaçant la constante, on obtient la fonction recherchée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 75e^{0,2t} - 15t - 75 = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t.$

B. Étude de fonction et application

Question B.1° a). À partir de l'expression fournie pour f', résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

1. $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$.
2. $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$, donc à $t \geq 0$.
3. Sur $[0, 3]$, l'inégalité est vérifiée partout, avec égalité en $t = 0$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) \geq 0$ sur $[0, 3]$, avec égalité seulement pour $t = 0$.

Question B.1° b). Déduire du signe de f' les variations de la fonction f sur [0, 3].

La dérivée est positive sur $]0, 3]$, donc f est strictement croissante sur $[0, 3]$. Ses valeurs aux bornes sont :

t	**0**	**3**
$f(t)$	0	$75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$
Variation	↗	

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f croît de 0 à environ $16,659$ km sur $[0, 3]$.

Question B.2°. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième.

À une minute, la distance parcourue est $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15 \approx 1,605$ km. Arrondie au dixième, elle vaut $1,6$ km.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $1,6$ km.

Question B.3° a). À partir de la relation entre la vitesse et la dérivée de la distance, déterminer la vitesse du wagon à t = 2 minutes, en kilomètres par minute, et arrondir au dixième.

La vitesse est $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$, en km/min. À $t = 2$, elle vaut $15(e^{0,4} - 1) \approx 7,377$ km/min, soit $7,4$ km/min au dixième.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $7,4$ km/min.

Question B.3° b). Dire si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse.

Le seuil de 400 km/h vaut $400/60 \approx 6,667$ km/min. La vitesse $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$ est croissante. Elle atteint le seuil pour $t = 5\ln(13/9) \approx 1,839$ minute, durée inférieure à deux minutes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, l'objectif est atteint après environ $1,839$ minute.

Question B.4°. Parmi les trois propositions, recopier l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2. Aucune justification n'est demandée.

La troisième proposition est la tangente au point d'abscisse 2 : sa pente est $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$, et son ordonnée à l'origine est $f(2) - 2f'(2) = 45e^{0,4} - 75$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

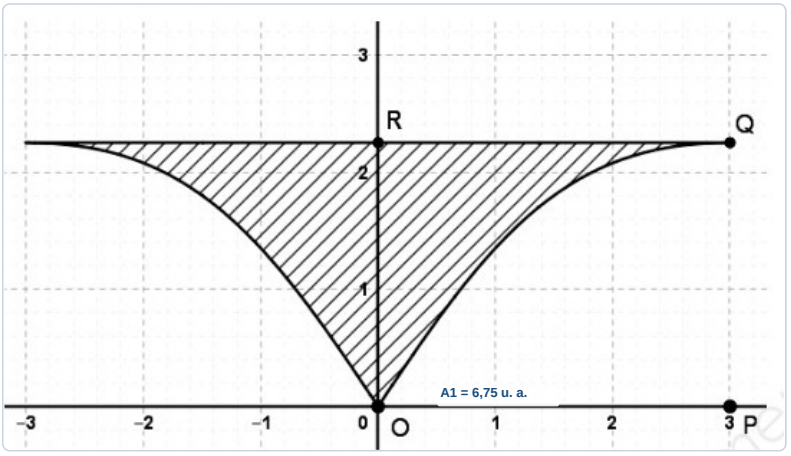
$y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question C.1°. À partir du schéma, choisir parmi les trois propositions la valeur de l'aire A1 du rectangle OPQR, en unités d'aire.

Le rectangle OPQR a pour largeur 3 m et pour hauteur $2,25$ m. Son aire est donc $A_1 = 3 \times 2,25 = 6,75$ unités d'aire : c'est la troisième proposition.

Rectangle OPQR



✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_1 = 6,75$ u. a.

Question C.2°. En exploitant la primitive fournie, calculer l'aire A2 de la partie du plan limitée par la courbe de g(x) = 27x/(2x² + 18), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3.

La fonction g est positive sur $[0, 3]$, donc l'aire demandée est son intégrale. Avec la primitive fournie :

$$A_2 = \left[\frac{27}{4}\ln(x^2 + 9)\right]_0^3 = \frac{27}{4}\ln\left(\frac{18}{9}\right) = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question C.3°. Déduire des questions précédentes l'aire hachurée A, en unités d'aire, et arrondir le résultat au millième.

1. L'aire située à droite de l'axe des ordonnées vaut $A_1 - A_2$.
2. Par symétrie, l'aire totale est le double :

$$A = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right) \approx 4,143.$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A \approx 4,143$ u. a.

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités conditionnelles, loi binomiale et test d'hypothèse

L'exercice étudie les obsolescences technique et logicielle dans une population de smartphones, puis modélise le nombre d'appareils non réparables dans un lot de 50. Il se termine par un test bilatéral portant sur une affirmation de sondage concernant la marque B.

A. Probabilités conditionnelles

Question A.1°. À partir des données de l'énoncé et de la population de 200 smartphones, compléter le tableau croisé des effectifs selon que les appareils sont touchés ou non par les obsolescences technique et logicielle.

Sur 200 smartphones, 3 % correspondent à 6 appareils touchés par l'obsolescence technique et 8 % à 16 appareils touchés par l'obsolescence logicielle. Parmi ces 16, 12,5 % sont aussi touchés techniquement, soit 2 appareils. On complète ensuite chaque case avec les totaux des lignes et des colonnes.

Smartphones	Touchés par l'obsolescence logicielle	Non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
Touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
Non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

Les totaux concordent avec l'effectif total de 200.

Tableau d'effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs : intersection 2, technique seule 4, logiciel seul 14, aucune des deux 180. Totaux : 6, 194, 16, 184 et 200.

Question A.2°. Donner les probabilités P(T), P(L) et P_L(T), où T désigne l'événement « le smartphone est touché par l'obsolescence technique » et L l'événement « le smartphone est touché par l'obsolescence logicielle ».

L'énoncé donne directement les proportions concernées : 3 % pour l'obsolescence technique et 8 % pour l'obsolescence logicielle. La notation $P_L(T)$ désigne la probabilité d'être touché techniquement sachant que l'appareil est touché logiciellement. Cette proportion conditionnelle est également fournie : 12,5 %. En écriture décimale, on obtient les trois valeurs demandées.

Probabilité	Valeur
$P(T)$	0,030
$P(L)$	0,080
$P_L(T)$	0,125

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0,030$, $P(L) = 0,080$ et $P_L(T) = 0,125$.

Question A.3° a). Calculer la probabilité P(T ∩ L).

La probabilité de l'intersection se calcule en multipliant la probabilité de L par la probabilité conditionnelle d'être aussi touché par T, sachant que L est réalisé. Ainsi :

$$P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T) = 0,080 \times 0,125 = 0,010.$$

La probabilité qu'un smartphone soit touché par les deux types d'obsolescence est donc de 1 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T \cap L) = 0,010$, soit 1 % des smartphones étudiés.

Question A.3° b). Calculer la probabilité P(T ∪ L).

L'événement $T \cup L$ signifie qu'au moins une des deux obsolescences touche le smartphone. En additionnant $P(T)$ et $P(L)$, l'intersection est comptée deux fois : il faut donc la soustraire une fois. On obtient :

$$P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L) = 0,030 + 0,080 - 0,010 = 0,100.$$

La probabilité recherchée est 10 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T \cup L) = 0,100$, soit 10 % des smartphones touchés par au moins une obsolescence.

Question A.3° c). Calculer P_T(L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par l'obsolescence logicielle sachant qu'il est touché par l'obsolescence technique.

On cherche la probabilité d'être touché par l'obsolescence logicielle parmi les smartphones touchés techniquement. On divise donc la probabilité de l'intersection par celle de T :

$$P_T(L) = \frac{P(T \cap L)}{P(T)} = \frac{0,010}{0,030} = \frac{1}{3} \approx 0,333.$$

Environ un tiers des appareils touchés par l'obsolescence technique sont également touchés par l'obsolescence logicielle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P_T(L) = \frac{1}{3} \approx 0,333$, soit environ 33,3 %.

B. Loi binomiale

Question B.1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables dans un lot de 50, suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.

Chaque prélèvement constitue une épreuve de Bernoulli : l'appareil est non réparable avec une probabilité constante de 0,045. Le stock est suffisamment important pour assimiler les prélèvements à des tirages avec remise, donc les épreuves sont indépendantes. La variable X compte le nombre de smartphones non réparables parmi les 50 prélevés. Elle suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0,045)$.

Question B.2°. Calculer la probabilité que tous les smartphones d'un lot de 50 soient réparables.

Tous les smartphones sont réparables si aucun n'est non réparable, c'est-à-dire si $X = 0$. La probabilité qu'un smartphone soit réparable vaut $1 - 0,045 = 0,955$. Les 50 prélèvements étant assimilés à des tirages indépendants avec remise, la probabilité que tous les appareils soient réparables est :

$$P(X = 0) = 0,955^{50} \approx 0,100039.$$

Arrondie au millième, cette probabilité vaut 0,100.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité que les 50 smartphones soient réparables est $0,100$, au millième près.

Question B.3° a). Exécuter à la main l'algorithme fourni, puis compléter le tableau des valeurs de P(X = i) et de la somme S pour i allant de 0 à 3.

Pour chaque valeur de i, on calcule $P(X = i) = \binom{50}{i}(0,045)^i(0,955)^{50-i}$. L'algorithme ajoute successivement chaque probabilité à la somme précédente. Les probabilités et les sommes cumulées sont arrondies au millième dans le tableau.

i	0	1	2	3
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

Chaque nouvelle valeur de S comprend les probabilités de tous les rangs précédents.

Tableau de l'algorithme complété

i	0	1	2	3
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X = i)$: 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Sommes successives S : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question B.3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte.

La boucle traite les valeurs $i = 0, 1, 2, 3$ et additionne les probabilités correspondantes. À la fin, $S = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \approx 0,813$. Cette somme est la probabilité qu'un lot de 50 smartphones comporte au plus trois appareils non réparables. Elle représente environ 81,3 % des lots selon le modèle binomial.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$S = P(X \leq 3) \approx 0,813$: environ 81,3 % des lots contiennent au plus trois smartphones non réparables.

Question B.4°. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte des smartphones non réparables.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance est $E(X) = np$. Ici, $n = 50$ et $p = 0,045$, donc :

$$E(X) = 50 \times 0,045 = 2,25.$$

Cette espérance est une moyenne : sur un grand nombre de lots de 50 smartphones, le nombre d'appareils non réparables est en moyenne de 2,25 par lot.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(X) = 2,25$ smartphones non réparables par lot, en moyenne.

C. Test d'hypothèse

Question C.1°. Sous l'hypothèse nulle, choisir parmi les trois propositions la valeur de h, arrondie au centième, telle que P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95.

Sous H_0, la fréquence suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037. L'intervalle central contenant 95 % des valeurs s'étend approximativement à 1,96 écarts types de la moyenne. Ainsi, $h \approx 1,96 \times 0,037 = 0,07252$, soit 0,07 au centième. Parmi les trois propositions, la valeur à choisir est donc 0,07.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La proposition exacte est $h \approx 0,07$.

Question C.2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %.

Pour un test bilatéral au seuil de 5 %, on ne rejette pas H_0 lorsque la fréquence observée appartient à l'intervalle central contenant 95 % des valeurs sous H_0. Avec $h = 0,07$, les bornes sont $0,55 - 0,07 = 0,48$ et $0,55 + 0,07 = 0,62$.

- Si la fréquence observée appartient à $[0,48\,;\,0,62]$, on ne rejette pas H_0.
- Si elle est à l'extérieur de cet intervalle, on rejette H_0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si $f \in [0,48\,;\,0,62]$; rejeter H_0 sinon.

Question C.3°. À partir des réponses de 76 personnes sur 180, conclure le test concernant l'affirmation selon laquelle 55 % des Français pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée.

La fréquence observée est $f = \frac{76}{180} \approx 0,422$. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle de décision. La fréquence appartient donc à la région de rejet du test bilatéral au seuil de 5 %. On rejette l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes estimant que la marque B pratique l'obsolescence programmée est de 55 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $76/180 \approx 0,422 < 0,48$: on rejette H_0. Le résultat de 55 % n'est pas validé.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2018, code MATGRB1, durée deux heures, avec un coefficient fixé selon la spécialité, de 1 à 3. L'exercice 1 modélise le départ d'un train à très haute vitesse et l'aire d'une pièce de gare. L'exercice 2 porte sur l'obsolescence des smartphones. Sont évalués équations différentielles, analyse, intégration, probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour résoudre y' - 0,2y = 3t, combiner la solution générale de l'équation homogène et une solution particulière.
- La dérivée de la distance par rapport au temps donne la vitesse, exprimée ici en kilomètres par minute.
- Pour une variable X binomiale de paramètres n et p, E(X) = np et P(X = 0) = (1 - p)^n.
- La probabilité conditionnelle vérifie P(A sachant B) = P(A ∩ B)/P(B), si P(B) > 0.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les intervalles d'étude et distinguer le signe de la dérivée des variations de la fonction.
- Convertir les unités avant de comparer une vitesse en km/min à un objectif exprimé en km/h.
- Vérifier les totaux des lignes et des colonnes du tableau d'effectifs, ainsi que l'effectif global de 200.
- Pour le test bilatéral, comparer la fréquence observée aux bornes de l'intervalle de décision et conclure en contexte.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment exploiter une équation différentielle lorsqu'une solution particulière est fournie ?

On résout l'équation homogène associée, puis on ajoute à sa solution générale une solution particulière de l'équation complète. La condition initiale sert ensuite à déterminer la constante.

Q : Comment reconnaître une loi binomiale dans l'exercice sur les smartphones ?

Le nombre de prélèvements est fixe, chaque smartphone a deux issues possibles et la probabilité de non-réparabilité reste constante. L'énoncé assimile les prélèvements à des tirages avec remise, donc indépendants.

Q : Comment gérer le temps dans cette épreuve de deux heures ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points, dont les parties peuvent être traitées indépendamment. Avancez sur les questions accessibles, puis réservez du temps pour vérifier les calculs, les arrondis, les unités et les choix multiples.

Q : Quels arrondis et éléments faut-il faire apparaître dans les réponses ?

Dans l'exercice 2, les résultats sont arrondis à 10^{-3} sauf indication contraire. L'exercice 1 précise ses arrondis question par question. Pour un test, indiquez la décision statistique et reliez-la explicitement à la situation étudiée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btspp.fr/assets/annales/bts-pp/E2 - Mathématiques/2018/BTS PP - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Pilotage de Procédés : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.