Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Épreuve de mathématiques - Groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot et étude d'une fonction (12 questions) **Page 3**

2. Production de tubes fluorescents et conformité de rivets (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btspp.fr/assets/annales/bts-pp/E2 - Mathématiques/2022/BTS PP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot et étude d'une fonction

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m·s⁻¹, ralentit sous l'action d'un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une fonction étudiée au moyen d'une équation différentielle, de ses variations et de sa limite, puis d'une intégrale et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.

La formule fournie pour l'équation homogène $y' + ay = 0$ donne $y(t) = ke^{-at}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Ici, $a = 0,8$, donc on remplace le coefficient dans cette expression.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc $g'(t) = 0$. En substituant dans le membre de gauche de (E), on obtient :

$$g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4.$$

L'égalité étant vérifiée pour tout $t \geq 0$, g est bien solution de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1. c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

Une solution particulière de (E) est $g(t) = 5$, et les solutions de l'équation homogène associée sont $ke^{-0,8t}$. Les solutions de l'équation complète s'obtiennent en ajoutant à cette solution particulière une solution de l'équation homogène.

$$y(t) = ke^{-0,8t} + 5, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

On part de la solution générale $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$. Comme $e^0 = 1$, la condition initiale donne $f(0) = k + 5 = 20$, donc $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant k dans la solution générale, on obtient la fonction cherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que sa limite lorsque t tend vers +∞ est 5.

Lorsque $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend ainsi vers zéro et il reste la constante 5. La limite de la fonction est donc 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

Si une fonction tend vers une limite finie en $+\infty$, sa courbe admet une asymptote horizontale d'équation égale à cette limite. Ici, $f(t) \to 5$, donc l'asymptote horizontale de C a pour ordonnée 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. En utilisant f'(t) = -12e$^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante. Elle vaut 20 en 0 et tend vers 5 en $+\infty$.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$		$-$
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Le chariot s'arrête si sa vitesse atteint zéro. Or, pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. Sa vitesse reste positive et tend vers 5 m·s⁻¹ sans jamais atteindre zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse tend vers 5 m·s⁻¹.

Question 4. a. **Pour F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, la dérivée de l'exponentielle composée fait apparaître le facteur $-0,8$:

$$F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t).$$

Donc F est bien une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4. b. **La distance parcourue entre t_0 et t_1 est donnée par l'intégrale de f entre ces instants. Calculer la distance exacte parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner son arrondi au centimètre.**

La distance parcourue est $F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive donnée :

$$d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 5 + 18,75(1 - e^{-0,8}) \text{ m}.$$

Cette expression est la valeur exacte. Son arrondi au centimètre donne la distance demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 5 + 18,75(1 - e^{-0,8}) \approx 15,33$ m.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les trois propositions, recopier l'unique développement limité correct de f à l'ordre 2 au voisinage de 0. Aucune justification n'est demandée. Les propositions sont : 20 - 12t + (24/5)t² + ε(t), avec ε(t) tendant vers 0 ; 20 + (24/5)t² ; 20 - 12t + 4,8t² + t²ε(t), avec ε(t) tendant vers 0.**

Le sujet demande de recopier l'unique proposition correcte. Le développement limité d'ordre 2 comporte le polynôme $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$ et un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$. C'est la troisième proposition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. On a $f(0) = 20$ et, avec la dérivée donnée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par $(0; 20)$ et a pour coefficient directeur -12.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = 20 - 12t$.

2. Production de tubes fluorescents et conformité de rivets

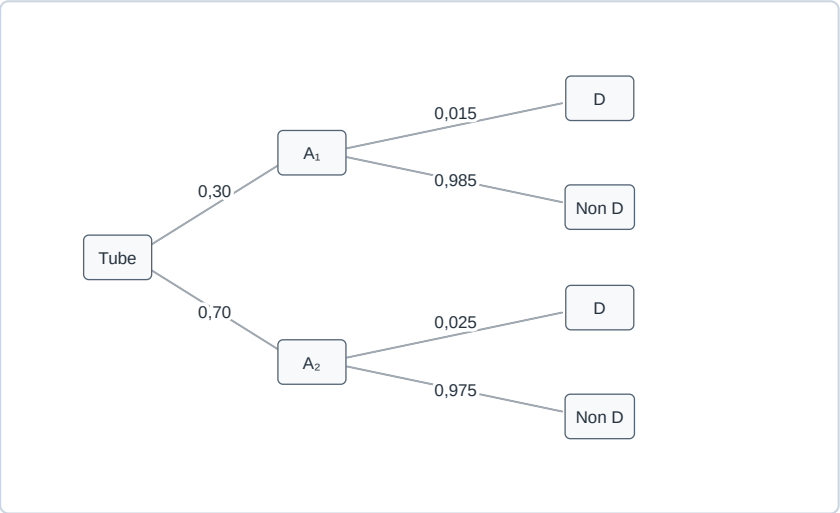
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers ayant des volumes de production et des taux de défaut différents. L'exercice étudie les probabilités conditionnelles, la durée de fonctionnement selon une loi exponentielle, puis l'estimation de la proportion de rivets conformes.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Construire un arbre pondéré décrivant les ateliers de production et la présence ou l'absence d'un défaut, avec les probabilités associées.

On construit l'arbre en séparant d'abord les deux ateliers. À la deuxième étape, les probabilités de défaut sont conditionnelles à l'atelier. Les probabilités des branches « sans défaut » sont leurs complémentaires : $1 - 0,015 = 0,985$ et $1 - 0,025 = 0,975$.

Arbre pondéré de production et de conformité



Les probabilités inscrites après A_1 et A_2 sont conditionnelles à l'atelier.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Atelier 1 : 0,30, puis défaut : 0,015 et sans défaut : 0,985. Atelier 2 : 0,70, puis défaut : 0,025 et sans défaut : 0,975.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

La probabilité de suivre successivement la branche « atelier 1 » puis « défaut » est le produit de la probabilité de la première branche par celle de la seconde :
$P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 %.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube prélevé au hasard présente un défaut est P(D) = 0,022.**

Les ateliers 1 et 2 forment une partition de la production. On additionne donc les probabilités des deux chemins qui aboutissent à un défaut :

$$P(D) = 0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,0045 + 0,0175 = 0,022.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$, soit 2,2 %.

Question 4. **Sachant que le tube prélevé ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

Par définition d'une probabilité conditionnelle, $P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{P(A_2 \cap \overline{D})}{P(\overline{D})}$. La probabilité du chemin atelier 2 sans défaut vaut $0,70 \times 0,975 = 0,6825$, et $P(\overline{D}) = 1 - 0,022 = 0,978$. Ainsi, $P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0,6825}{0,978} \approx 0,698$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité recherchée est environ 0,698, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, la formule fournie donne $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$. Avec $\lambda = 0,001$, on obtient $E(T) = \dfrac{1}{0,001} = 1\,000$ heures. Cette espérance représente la durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube fluorescent.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures.

Question 2. **Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La formule de la loi exponentielle donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Comme la loi est continue, $P(T < 8\,000) = P(T \leq 8\,000)$. Donc $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0,9997$, soit $1,00$ au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 1,00$, au centième.

Question 3. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

1. Pour une loi exponentielle, $P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = e^{-\lambda t}$.
2. Alors $P(T > 10\,000) = e^{-0,001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0,0000454$. Arrondie au centième, cette probabilité vaut $0,00$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0,00$, au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Sur un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée des rivets conformes dans l'échantillon :
$\hat{p} = \dfrac{975}{1\,000} = 0,975$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\hat{p} = 0,975$, soit 97,5 %.

Question 2. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance de niveau 95 % centré sur la fréquence observée pour la proportion p de rivets conformes. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

Avec la formule fournie, $f = 0,975$ et $n = 1\,000$, la marge vaut $1,96\sqrt{\dfrac{0,975(1-0,975)}{1\,000}} \approx 0,009677$. Les bornes sont donc $0,975 - 0,009677 \approx 0,965323$ et $0,975 + 0,009677 \approx 0,984677$. À 10^{-3} près, l'intervalle est $[0,965\ ;\ 0,985]$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, dure 2 heures et compte un coefficient de 2, sauf en Traitement des matériaux où il est de 3. Deux exercices de 10 points portent sur le freinage d'un chariot, les équations différentielles, les probabilités de production, la loi exponentielle et l'intervalle de confiance d'une proportion.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont $y(t) = ke^{-at}$; pour une équation avec second membre, ajouter une solution particulière.
- Si f(t) tend vers une limite L finie en +∞, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et E(T) = 1/λ.
- L'intervalle de confiance à 95 % fourni est $f \pm 1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}$, où f est la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale à la solution générale de l'équation différentielle pour déterminer la constante.
- Dans l'arbre pondéré, distinguer les probabilités des ateliers des probabilités conditionnelles de défaut.
- Pour calculer P(T > t), utiliser la probabilité complémentaire et vérifier le seuil demandé.
- Pour l'intervalle de confiance, prendre f = 0,975 et n = 1 000, puis arrondir les bornes au millième.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment construire l'arbre pondéré des deux ateliers ?

Commencez par les deux ateliers, pondérés par leurs parts de production : 0,30 et 0,70. Depuis chaque atelier, ajoutez les branches défaut et absence de défaut avec les taux propres à l'atelier concerné.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube fonctionne plus de 10 000 heures ?

La formule donnée fournit $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Donc $P(T > t) = e^{-\lambda t}$; remplacez λ par 0,001 et t par 10 000, puis arrondissez au centième.

Q : Quelle est la durée et comment les points sont-ils répartis ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points chacun. Le coefficient est de 2 pour les spécialités du tableau, sauf la spécialité Traitement des matériaux, pour laquelle il est de 3.

Q : Quelle méthode et quelle précision faut-il respecter pour l'intervalle de confiance ?

Utilisez la fréquence observée 975/1 000 et la formule fournie avec n = 1 000. Calculez les deux bornes, puis arrondissez chacune au millième comme demandé.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btspp.fr/assets/annales/bts-pp/E2 - Mathématiques/2022/BTS PP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Pilotage de Procédés : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.