Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage** (12 questions) — **Page 3**

2. **Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btspp.fr/assets/annales/bts-pp/E2 - Mathématiques/2022/BTS PP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m/s, est ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle, puis étudiée pour déterminer son évolution, la distance parcourue et son comportement au voisinage de l'instant initial.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

Pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient de y vaut $0{,}8$. On remplace donc a par cette valeur dans la formule. Comme aucune condition initiale n'est imposée dans cette question, la constante reste arbitraire et peut être choisie dans $\mathbb{R}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La famille de toutes les solutions de l'équation homogène, sur l'intervalle donné, est : $\boxed{y(t) = ke^{-0{,}8t},\ k \in \mathbb{R}}$.

Question 1.b. Soit g la fonction définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante sur $[0; +\infty[$, donc sa dérivée est nulle pour tout t de cet intervalle. En substituant $g(t) = 5$ dans le membre de gauche de l'équation, on obtient $g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$. Le résultat coïncide avec le membre de droite, donc l'équation est vérifiée pour tout $t \geq 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La fonction constante proposée vérifie l'équation différentielle sur tout l'intervalle : $\boxed{g(t) = 5}$.

Question 1.c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation complète. Pour obtenir toutes les solutions, on lui ajoute les solutions de l'équation homogène associée $y' + 0{,}8y = 0$. Celles-ci sont de la forme $ke^{-0{,}8t}$, avec k réel. Cette somme donne donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur l'intervalle demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La solution particulière vaut 5, à laquelle s'ajoute toute solution homogène : $\boxed{y(t) = 5 + ke^{-0{,}8t},\ k \in \mathbb{R}}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale obtenue précédemment est $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. Pour respecter la condition initiale, on évalue cette expression en $t = 0$. Comme $e^0 = 1$, on doit avoir $5 + k = 20$, d'où $k = 15$. En remplaçant la constante par cette valeur dans la solution générale, on obtient la fonction de vitesse recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La solution vérifiant la vitesse initiale de 20 m/s est : $\boxed{f(t) = 15e^{-0,8t} + 5}$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

La fonction est donnée par $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le produit $-0,8t$ tend vers $-\infty$. L'exponentielle $e^{-0,8t}$ tend alors vers 0, et le terme $15e^{-0,8t}$ tend également vers 0. Le terme constant ne varie pas, donc la limite de la somme est égale à 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La vitesse tend vers la valeur constante de 5 m/s : $\boxed{\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5}$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5. Par définition, la courbe représentative d'une fonction qui tend vers une valeur finie admet une asymptote horizontale d'ordonnée cette valeur. Ici, l'ordonnée limite est 5. L'équation de cette droite horizontale s'écrit donc avec y égal à 5, dans le repère de la courbe.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation : $\boxed{y = 5}$.

Question 2. À partir de l'expression fournie de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est ainsi strictement décroissante sur l'intervalle. Son départ est $f(0) = 15 + 5 = 20$, et sa limite en $+\infty$, établie précédemment, est 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

La fonction décroît strictement de 20 vers sa limite 5 lorsque le temps augmente.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour que le chariot s'arrête, sa vitesse devrait atteindre zéro à un instant donné. Or, pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$ reste strictement supérieure à 5 m/s. La vitesse diminue et se rapproche de 5 m/s, mais cette limite n'est pas nulle et n'est jamais atteinte.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse reste toujours supérieure à 5 m/s.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = -18,75 e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme de $F(t) = -18{,}75e^{-0,8t} + 5t$. La dérivée de l'exponentielle composée donne $(-18{,}75)(-0{,}8)e^{-0,8t} = 15e^{-0,8t}$, et la dérivée de $5t$ vaut 5. Ainsi, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. La dérivée de F étant bien égale à f, la fonction proposée est une primitive.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La dérivée de la fonction donnée est bien la vitesse f : $\boxed{F'(t) = f(t)}$.

Question 4.b. À l'aide de l'intégrale de la vitesse, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t = 0 et t = 1 seconde, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue est l'intégrale de la vitesse, donc $d = F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive donnée, $F(1) = -18{,}75e^{-0,8} + 5$ et $F(0) = -18{,}75$. La soustraction donne $d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0,8}$. Comme $0{,}8 = 4/5$, cette expression est exacte. Son arrondi au centimètre s'exprime avec deux décimales en mètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La distance exacte et son arrondi au centimètre sont : $\boxed{d = \frac{95}{4} - \frac{75}{4}e^{-4/5}\ \text{m} \approx 15{,}33\ \text{m}}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Parmi les propositions, recopier l'unique développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.

Le logiciel affiche la partie polynomiale régulière du développement limité : $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0. Il faut donc retenir la proposition qui conserve les trois termes du polynôme et ajoute ce reste.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le seul choix exact est le polynôme affiché, complété par un reste d'ordre supérieur : $\boxed{20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t),\ \lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0}$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On connaît $f(0) = 20$. À partir de la dérivée fournie, $f'(0) = -12e^{-0{,}8\times 0} = -12$, car l'exponentielle en 0 vaut 1. La tangente passe donc par le point $(0; 20)$ et a pour coefficient directeur -12.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La tangente au point d'abscisse zéro a pour équation : $\boxed{y = 20 - 12t}$.

2. Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique

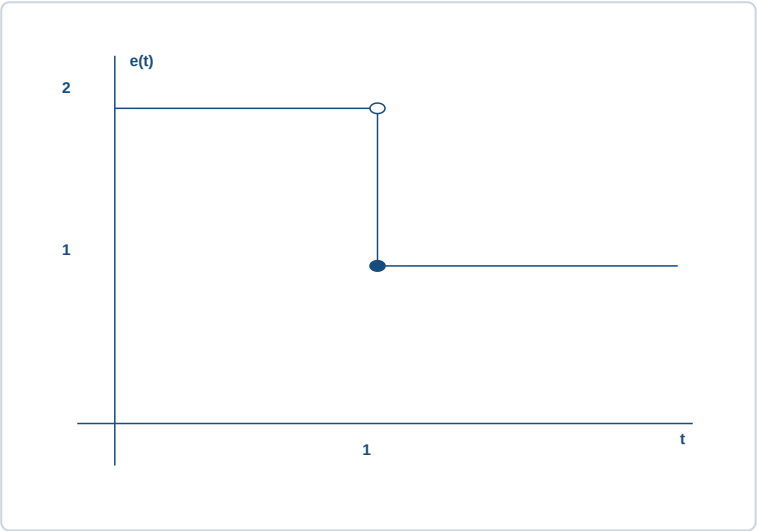
Un système électrique est décrit par son signal d'entrée e(t), son signal de sortie s(t) et sa fonction de transfert H(p). L'étude mobilise la fonction échelon unité et les transformées de Laplace pour représenter l'entrée, déterminer la sortie et tracer son évolution.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de e(t) = 2U(t) - U(t - 1).

Pour $t < 0$, le signal causal est nul. À $t = 0$, il passe à 2 puisque $U(0) = 1$. À $t = 1$, il passe à 1 : le point de hauteur 2 est ouvert et celui de hauteur 1 est fermé.

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

e(t) = 0 si t < 0, 2 si 0 ≤ t < 1, et 1 si t ≥ 1.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).

Par linéarité, la transformée de $U(t)$ est $1/p$. La propriété de retard donne la transformée de $U(t-1)$: e^{-p}/p. Ainsi, $E(p) = 2/p - e^{-p}/p$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e^(-p).

Comme $S(p) = H(p)E(p)$, avec $H(p) = 1/(p+1)$ et $E(p) = 2/p - e^{-p}/p$, on multiplie les deux expressions : $S(p) = \dfrac{1}{p+1}\left(\dfrac{2}{p} - \dfrac{e^{-p}}{p}\right)$. La mise au même dénominateur donne le résultat demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

En réduisant au même dénominateur, $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{p+1-p}{p(p+1)}$. Le numérateur vaut 1, ce qui vérifie l'égalité pour les valeurs de p où les expressions sont définies.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, 1/(p + 1), e^(-p)/p et e^(-p)/(p + 1).

On utilise $\mathcal{L}^{-1}(1/p) = U(t)$ et $\mathcal{L}^{-1}(1/(p+1)) = e^{-t}U(t)$. Le facteur e^{-p} retarde chaque fonction d'une unité. On obtient donc les quatre inverses suivants, dans l'ordre demandé.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. **En déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

La décomposition en éléments simples donne $S(p) = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$. Pour $0 \leq t < 1$, les fonctions retardées sont nulles, car $U(t-1) = 0$. Il reste donc la première partie de l'expression.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis avec une valeur approchée au dixième.**

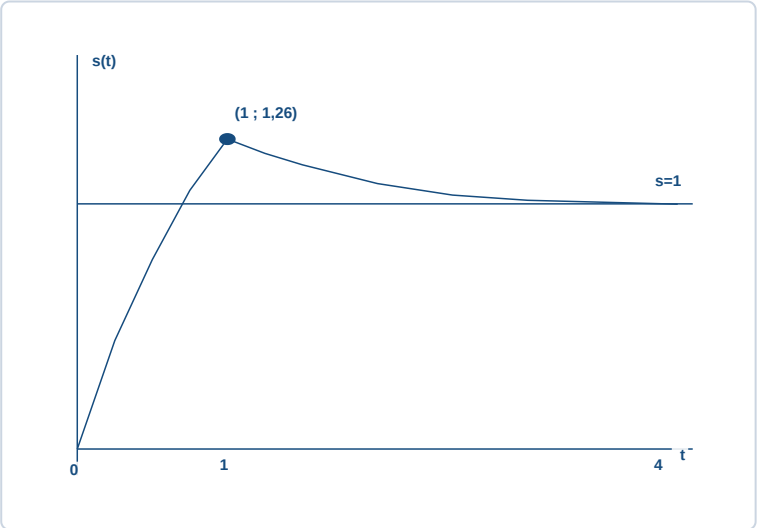
À $t = 1$, la formule valable pour $t \geq 1$ donne $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. En simplifiant, $s(1) = 2 - 2/e$, soit environ 1,264. Arrondi au dixième, cela donne 1,3.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \frac{2}{e} \approx 1,3$

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0, 1[$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$: la courbe croît de 0 à $s(1) = 2 - 2/e$. Pour $t \geq 1$, $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$ décroît vers 1. Les deux expressions coïncident en $t = 1$, où la courbe atteint son maximum.

Courbe représentative de s(t)



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe croît de $(0, 0)$ à $(1, 2 - 2/e)$, puis décroît vers l'asymptote horizontale $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) en +∞.

Pour $t \geq 1$, on a $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le terme exponentiel tend vers 0. La fonction tend donc vers 1.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Les coefficients sont 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot et la réponse d'un système électrique, en évaluant équations différentielles, analyse de fonctions, intégrales et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = 0, les solutions sont y(t) = ke^(-at) ; une solution particulière constante permet de résoudre l'équation avec second membre constant.
- La limite d'une fonction en +∞ peut établir une asymptote horizontale ; le signe de sa dérivée détermine ses variations.
- La distance parcourue sur [t0 ; t1] est l'intégrale de la vitesse : d = ∫ de t0 à t1 f(t)dt.
- Un retard d'une unité dans le domaine temporel se traduit par un facteur e^(-p) dans la transformée de Laplace.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : la vitesse est en m/s, le temps en secondes et la distance en mètres.
- Pour le tableau de variations, justifier le signe de f' et indiquer la valeur initiale ainsi que la limite en +∞.
- Dans les calculs de distance, évaluer la primitive aux deux bornes dans le bon ordre et arrondir au centimètre demandé.
- Pour les transformées inverses avec retard, appliquer la propriété de décalage et tenir compte de l'échelon unité.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment obtenir la solution de l'équation différentielle du modèle de freinage ?

On résout d'abord l'équation homogène, puis on cherche une solution particulière de l'équation complète. La solution générale est la somme des deux, et la condition f(0) = 20 détermine la constante.

Q : Comment passer de la fonction de transfert au signal de sortie ?

On utilise S(p) = H(p)E(p), puis on décompose les expressions rationnelles en éléments simples. On applique ensuite les transformées inverses et la propriété de retard pour retrouver s(t) sur chaque intervalle.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Le sujet comporte deux exercices indépendants de 10 points chacun. Il est utile de répartir le temps entre eux, de traiter d'abord les questions maîtrisées et de réserver quelques minutes à la vérification des calculs et des tracés.

Q : Quel barème détaillé faut-il connaître pour cette épreuve ?

Le sujet indique 10 points pour chacun des deux exercices, mais ne précise pas la répartition des points entre les questions. Il faut donc répondre clairement à toutes les consignes, justifier les démonstrations et soigner les représentations demandées.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btspp.fr/assets/annales/bts-pp/E2 - Mathématiques/2022/BTS PP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Pilotage de Procédés : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.