Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (14 questions) — **Page 3**
2. **Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance** (10 questions) — **Page 8**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btspp.fr/assets/annales/bts-pp/E2 - Mathématiques/2023/BTS PP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La fermeture d'un tiroir est modélisée par la distance f(t) entre le fond du tiroir et celui du meuble, en fonction du temps. L'exercice étudie l'équation différentielle associée, les variations et l'asymptote de f, l'exécution d'un algorithme, puis la tangente et le développement limité de la fonction.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Pour l'équation caractéristique, on identifie les coefficients puis on calcule le discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Comme $\Delta > 0$, il existe deux racines réelles distinctes. La formule $r = \frac{-5 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ donne les deux valeurs cherchées.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. Résoudre l'équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0, en utilisant le tableau fourni.

Le discriminant est positif et les racines de l'équation caractéristique sont -1 et -4. D'après le tableau fourni, lorsque l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme suivante :

1. Associer à chaque racine le terme exponentiel correspondant.
2. Prendre une combinaison linéaire de ces deux termes, avec des constantes réelles.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0; +\infty[$, $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la position initiale du point M et de sa vitesse au début de la fermeture, déterminer f(0) et f'(0).

La fonction f représente la distance OM, exprimée en centimètres. Au début de la fermeture, le point M est à 20 cm de O, donc la distance initiale fournit directement $f(0)$. La vitesse donnée est la dérivée de cette distance par rapport au temps. Elle est négative, car le point se rapproche de O.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. **En admettant l'expression fournie de f(t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

On remplace t par 2 dans l'expression fournie. La distance exacte est donc $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. En évaluant cette expression, on obtient environ $3,157$ cm. La distance étant positive, cette valeur correspond bien à la distance OM demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm, soit environ $3,157$ cm.

Question 3. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer qu'il est fermé en moins de 4 secondes et justifier.**

La distance est décroissante pendant la fermeture. On évalue la fonction au bout de 4 secondes, puis on compare au seuil de fermeture de 0,5 cm :

- $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427$ cm.
- Cette valeur est strictement inférieure à 0,5 cm, donc le seuil est franchi avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le constructeur a raison : le tiroir est fermé avant 4 secondes, car $f(4) \approx 0,427 < 0,5$ cm.

Partie B

Question 1.a. **En utilisant la limite rappelée pour e⁻ᵘ, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. En utilisant la limite rappelée pour l'exponentielle, chacun des deux termes tend vers zéro. Leur différence tend donc également vers zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. **En déduire que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.**

La courbe admet une asymptote horizontale en $+\infty$ lorsque la fonction tend vers une limite finie. Ici, la limite déterminée à la question précédente vaut zéro. On peut donc écrire directement l'équation de cette droite horizontale, dans le repère où l'ordonnée est la distance $f(t)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$ a pour équation $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$, en appliquant la règle de dérivation de $e^{u(t)}$: sa dérivée est $u'(t)e^{u(t)}$. Ainsi, le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$, et le second $+\frac{40}{3}e^{-4t}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

On sait que $f'(t) < 0$ sur tout l'intervalle, donc f y est strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = 20$, et lorsque t tend vers $+\infty$, $f(t)$ tend vers 0. Le tableau rassemble ces informations.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow$ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant si nécessaire des lignes jusqu'à son arrêt. Indiquer les valeurs de f(t) arrondies à 10^{-2} et si la condition de la boucle est vraie ou fausse.

La condition de la boucle est exactement $f(t) > 0,5$. On calcule la fonction aux temps demandés, puis on teste cette inégalité. À 3,8 secondes, elle est encore vraie ; à 3,9 secondes, elle devient fausse et la boucle s'arrête.

Ligne	t	$f(t)$**, arrondie à** 10^{-2}	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39 : pour $t = 3,9$, la condition est fausse.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

À chaque passage dans la boucle, la variable t augmente de 0,1 seconde. Elle vaut 3,8 secondes à la ligne 38 et la condition reste alors vraie. Après une nouvelle augmentation, elle vaut 3,9 secondes ; la distance calculée est inférieure à 0,5 cm, ce qui arrête l'algorithme. Le tiroir est donc fermé selon le critère donné.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À la fin de l'algorithme, $t = 3,9$ s : le tiroir est fermé au bout de 3,9 secondes.

Question 4.a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. Les données initiales donnent $f(0) = 20$ et $f'(0) = -10$. En remplaçant ces deux valeurs dans la formule de la tangente, on obtient une droite passant par le point $(0; 20)$, de coefficient directeur -10.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 10t$.

Question 4.b. Parmi les réponses proposées, recopier l'unique développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.

Le sujet donne la partie régulière du développement limité à l'ordre deux : $20 - 10t - 15t^2$. Parmi les propositions, il faut choisir celle qui ajoute un reste d'ordre deux écrit sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Cette forme est le reste adapté à un développement limité à l'ordre deux.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 4.c. Indiquer si, au voisinage de zéro, la courbe de f est au-dessus ou au-dessous de sa tangente T. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

La tangente est $T(t) = 20 - 10t$. D'après le développement limité, l'écart entre la courbe et sa tangente est $f(t) - T(t) = -15t^2 + t^2\varepsilon(t)$. Pour t proche de zéro et non nul, le terme dominant est négatif. La courbe est donc située sous la tangente au voisinage de zéro.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Au voisinage de zéro, la courbe de f est au-dessous de la tangente T.

2. Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance

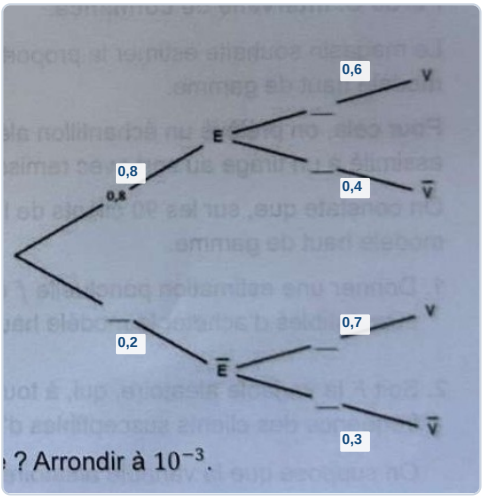
Un magasin prête gratuitement des vélos électriques ou mécaniques dans l'espoir de provoquer une vente, puis étudie les durées de réparation d'un échantillon de vélos. L'exercice porte aussi sur l'estimation de la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme.

Partie A : Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et l'issue du prêt, à partir des données fournies.

La première bifurcation indique le type de vélo prêté. Depuis chaque type, les branches « vente » et « pas de vente » portent des probabilités complémentaires. Les six probabilités sont inscrites sur l'arbre.

Arbre pondéré complété



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Branches : $0,8$, $0,2$, puis $0,6$, $0,4$, $0,7$, $0,3$.

Question 2. Déterminer la probabilité P(E ∩ V), où E désigne l'événement « il s'agit d'un vélo électrique » et V l'événement « le prêt débouche sur une vente ».

Le chemin correspondant à $E \cap V$ passe par la branche « vélo électrique », puis par la branche « vente ». La probabilité de ce chemin est le produit des probabilités portées par ces deux branches : $P(E \cap V) = P(E)P(V \mid E)$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(E \cap V) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$.

Question 3. **Démontrer que la probabilité que le prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.**

Chemin menant à une vente	Probabilité
Vélo électrique	$0,8 \times 0,6$
Vélo mécanique	$0,2 \times 0,7$

Ces deux chemins sont incompatibles. On additionne leurs probabilités pour obtenir la probabilité d'une vente.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(V) = 0,8 \times 0,6 + 0,2 \times 0,7 = 0,62.$

Question 4. **Sachant que le prêt a débouché sur une vente, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique. Arrondir à 10^{-3}.**

Par définition d'une probabilité conditionnelle, on divise la probabilité d'une vente avec un vélo électrique par la probabilité totale d'une vente : $P(E \mid V) = \dfrac{P(E \cap V)}{P(V)}$. Le résultat est arrondi au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(E \mid V) = \dfrac{0,48}{0,62} \approx 0,774.$

Partie B : Loi binomiale

Question 1. **On admet que X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres, sachant que X compte, parmi 80 vélos réparés, ceux dont la réparation nécessite moins d'une heure de main-d'œuvre.**

Chaque vélo réparé est une épreuve de Bernoulli : le succès est une réparation nécessitant moins d'une heure, de probabilité $0,62$. La variable X compte les succès parmi 80 réparations.

Paramètre	Valeur
Nombre d'épreuves	80
Probabilité de succès	0,62

✓ RÉPONSE À RETENIR

$X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62).$

Question 2. **Déterminer la probabilité P(X = 40). Arrondir à 10^{-3}.**

Pour une loi binomiale, $P(X = 40) = \binom{80}{40}(0,62)^{40}(1-0,62)^{40}$. En remplaçant $1-0,62$ par $0,38$, puis en arrondissant au millième, on obtient la probabilité demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 40) \approx 0,008$.

Question 3. **Déterminer la probabilité que, dans l'échantillon, le nombre de vélos nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de vélos nécessitant plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.**

1. Le nombre de vélos nécessitant plus d'une heure est $80 - X$.
2. La condition demandée est $X > 80 - X$, soit $X \geq 41$. On calcule donc le complément de $P(X \leq 40)$ pour $X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité demandée est environ $0,981$.

Partie C : Intervalle de confiance

Question 1. **À partir des 54 clients sur 90 susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.**

L'estimation ponctuelle de la proportion est la fréquence observée dans l'échantillon : le nombre de clients susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme divisé par l'effectif total.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = \dfrac{54}{90} = 0,60$.

Question 2.a. **À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % pour la proportion p.**

Avec $f = 0,60$ et $n = 90$, la formule fournie donne une marge de $1,96\sqrt{\dfrac{0,60(1-0,60)}{90}} \approx 0,1012$. On soustrait puis on ajoute cette marge à f, et on arrondit les bornes au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0,499\,;\,0,701]$.

Question 2.b. Est-on certain que la proportion p appartient à l'intervalle de confiance obtenu ?

Le niveau de confiance de 95 % concerne la méthode utilisée sur de nombreux échantillons, et non la certitude pour cet intervalle particulier.

- L'intervalle obtenu peut contenir la proportion réelle, mais ne le garantit pas.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, on ne peut pas en être certain.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2023, code 23MATGRB1, dure 2 heures. Le coefficient est 2 pour la plupart des spécialités et 3 en Traitement des matériaux. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis un magasin de vélos par probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les racines réelles distinctes de $r^2 + 5r + 4 = 0$ déterminent la solution générale de l'équation différentielle homogène associée.
- Si $f'(t) < 0$, f est décroissante ; si sa limite en $+\infty$ est finie, la courbe admet une asymptote horizontale correspondante.
- Pour X suivant une loi binomiale de paramètres n et p, $P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^{n-k}$.
- L'intervalle de confiance fourni est $[f - 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)} ; f + 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)}]$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités du modèle : f(t) est en centimètres et t en secondes.
- Dans l'arbre, distinguer les probabilités inscrites sur les branches des probabilités des chemins.
- Traduire « strictement supérieur » par une inégalité stricte entre les nombres de réparations concernés.
- Respecter les arrondis demandés et ne pas présenter l'intervalle de confiance comme une certitude.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle du tiroir ?

Résolvez d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses deux racines réelles distinctes donnent une solution de la forme $y(t) = C_1e^{r1t} + C_2e^{r2t}$. Les conditions initiales permettent ensuite de déterminer les constantes.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un prêt conduise à une vente ?

Additionnez les probabilités des deux chemins qui aboutissent à une vente : P(E)P(V|E) et P(non E)P(V|non E). Cette somme applique la formule des probabilités totales aux deux types de vélos prêtés.

Q : Comment répartir le temps et les points pendant l'épreuve ?

L'épreuve dure 2 heures et comprend deux exercices de 10 points chacun. Les parties de l'exercice 1 et les trois parties de l'exercice 2 sont annoncées comme indépendantes, ce qui permet de commencer par les questions les mieux maîtrisées.

Q : L'intervalle de confiance garantit-il que la proportion réelle s'y trouve ?

Non. L'intervalle obtenu avec la formule fournie correspond à un niveau de confiance de 95 %, mais il ne garantit pas avec certitude que la proportion inconnue p appartienne à cet intervalle.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btspp.fr/assets/annales/bts-pp/E2 - Mathématiques/2023/BTS PP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Pilotage de Procédés : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.