Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (12 questions) — **Page 3**

2. **Séries de Fourier d’une fonction paire périodique** (10 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btspp.fr/assets/annales/bts-pp/E2 - Mathématiques/2023/BTS PP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

On modélise par f(t), en centimètres, la distance entre le fond d’un meuble et le fond d’un tiroir pendant sa fermeture. L’exercice étudie cette distance par une équation différentielle, puis analyse la fonction obtenue, un algorithme de seuil et la position moyenne du tiroir.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On cherche les racines de $r^2 + 5r + 4 = 0$. Le produit des deux nombres 1 et 4 vaut 4, et leur somme vaut 5. On peut donc factoriser le trinôme en $(r + 1)(r + 4)$. En annulant chacun des facteurs, on obtient les deux solutions de l’équation caractéristique.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. Résoudre l’équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0, en utilisant le tableau fourni.

1. L’équation caractéristique associée est $r^2 + 5r + 4 = 0$, dont les deux racines réelles distinctes sont -1 et -4.
2. D’après le tableau fourni, lorsque l’équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, les solutions de l’équation différentielle sont les combinaisons linéaires de $e^{r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$. Les constantes réelles restent arbitraires en l’absence de conditions initiales.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la situation initiale, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

La fonction f représente la distance OM, en centimètres. La donnée initiale « le point M est situé à 20 cm de O » donne donc directement $f(0) = 20$.

- La vitesse de déplacement est la dérivée de la distance.
- Comme le tiroir se rapproche de O, la vitesse est négative et vaut $-10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

Question 2.b. **Sachant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

Deux secondes après le début de la fermeture, on remplace t par 2 dans la fonction donnée. Les exposants deviennent -2 et -8, d'où :

$$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}.$$

Cette expression exacte est la distance OM, en centimètres. Sa valeur approchée, utile pour situer la distance, est $3,1567\ \text{cm}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = \left(\frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}\right)\ \text{cm}.$

Question 2.c. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Le constructeur affirme que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes. A-t-il raison ? Justifier.**

À $t = 4$, la distance vaut $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,4274\ \text{cm}$, donc elle est sous le seuil de $0,5\ \text{cm}$. La fonction est continue et strictement décroissante sur l'intervalle considéré. Comme elle part de $20\ \text{cm}$, elle a franchi le seuil avant l'instant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : le seuil est franchi avant 4 s, car $f(4) \approx 0,4274 < 0,5$.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. **En rappelant que la limite de e⁻ᵘ lorsque u tend vers +∞ est nulle, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

On a $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les quantités t et $4t$ tendent vers $+\infty$. La limite rappelée dans l'énoncé donne alors $e^{-t} \to 0$ et $e^{-4t} \to 0$. Les deux termes de $f(t)$ tendent donc vers zéro, et leur différence aussi.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe C possède une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 0. La courbe représentative d'une fonction qui tend vers une limite finie L admet, en $+\infty$, une asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, cette asymptote est l'axe des abscisses.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque exponentielle avec la règle $(e^{at})' = ae^{at}$. Ainsi, le terme $\frac{70}{3}e^{-t}$ donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$. Pour le second terme, le coefficient $-\frac{10}{3}$ est multiplié par -4, ce qui donne $\frac{40}{3}e^{-4t}$. La dérivée est la somme de ces deux termes.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Puisque $f'(t) < 0$ sur l'intervalle, f y est strictement décroissante. Sa valeur à l'origine est $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, et sa limite en $+\infty$ est 0. Le tableau de variations se complète ainsi :

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow$ 0

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

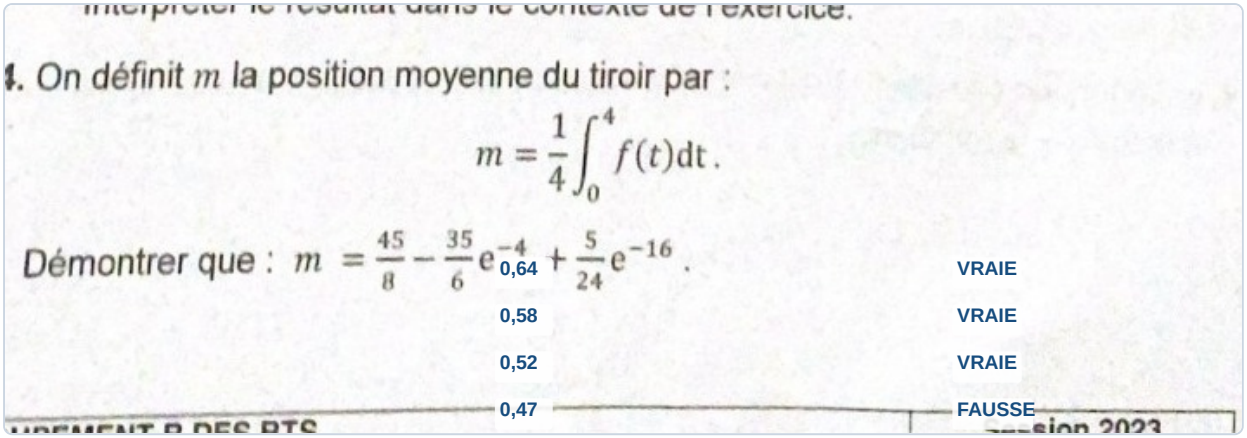
f décroît de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en calculant la valeur de f(t) arrondie au centième et en évaluant la condition, jusqu'à ce que l'algorithme s'arrête. Ajouter des lignes si nécessaire.

Le programme compare la valeur exacte de $f(t)$ à $0,5$, tandis que la colonne du tableau affiche $f(t)$ arrondie au centième. La condition est encore vraie à $t = 3,8$. À $t = 3,9$, elle devient fausse : c'est la dernière ligne calculée avant l'arrêt.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Valeurs calculées dans le tableau de l'algorithme



✓ RÉPONSE À RETENIR

À la ligne 39, $t = 3,9$ et la condition est fausse.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

La boucle s'arrête dès que la condition $f(t) > 0,5$ devient fausse. À $t = 3,9$, on a $f(3,9) \approx 0,47 < 0,5$, donc cette condition n'est plus satisfaite. La variable garde alors la valeur $3,9$. Dans le contexte, le tiroir a franchi le seuil de fermeture avant l'instant de l'arrêt de l'algorithme.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3,9$ s à l'arrêt ; le seuil de fermeture est franchi avant cet instant.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ est $-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. On évalue cette primitive entre 0 et 4, puis on divise par 4 conformément à la définition de la position moyenne :

$$m = \frac{1}{4}\left[-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}\right]_0^4.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16} \approx 5,5182$ cm.

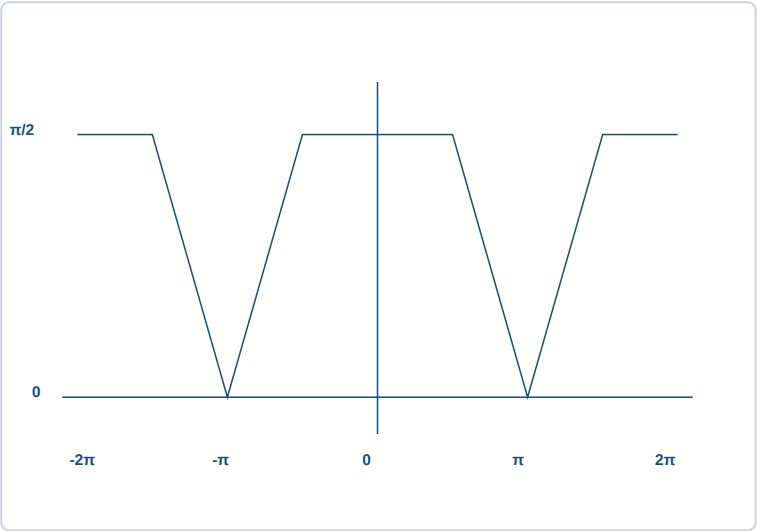
2. Séries de Fourier d'une fonction paire périodique

On étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π]. Les questions portent sur son tracé, ses coefficients de Fourier et sa somme partielle d'ordre 3, puis sur une approximation de la valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π].

Sur une période, la courbe est horizontale à la hauteur $\pi/2$ de $-\pi/2$ à $\pi/2$, puis descend ou monte linéairement jusqu'à 0 en $\pm\pi$. On prolonge ce motif par périodicité de période 2π sur l'intervalle demandé.

Tracé de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracé périodique : plateaux de hauteur $\pi/2$, minima nuls en $t = -\pi$ et $t = \pi$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

La fonction f est paire et la fonction $t \mapsto \sin(nt)$ est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur une période symétrique $[-\pi, \pi]$ est nulle. Le coefficient b_n, proportionnel à cette intégrale, est nul pour chaque entier $n \geq 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. On note ω la pulsation associée à la fonction f. Déterminer ω.

La pulsation associée à une période T est $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Comme $T = 2\pi$, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$ rad par unité de temps.

Question 4. Démontrer que le coefficient a_0 est égal à $3\pi/8$.

Le formulaire donne $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$. Par parité et périodicité, l'intégrale vaut deux fois l'aire sur $[0, \pi]$. Cette aire est $\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi^2}{8}$. Ainsi, $a_0 = \frac{1}{2\pi} \times 2 \times \frac{3\pi^2}{8}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)dt + (2/\pi)\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)dt$.

Comme f est paire, le formulaire et $T = 2\pi$ donnent $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare l'intégrale en $[0, \pi/2]$ et $[\pi/2, \pi]$, où $f(t) = \pi/2$ puis $f(t) = \pi - t$. Le facteur $\frac{2}{\pi}$ simplifie le premier terme en l'intégrale demandée.

$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt.$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt.$

Question 6. En utilisant l'expression fournie $a_n = 2/(\pi n^2)(\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi))$, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

Dans la formule fournie, on remplace n successivement par 1, 2 et 3. Les valeurs des cosinus correspondantes donnent les coefficients exacts :

Coefficient	Valeur exacte
a_1	$\frac{2}{\pi}$
a_2	$-\frac{1}{\pi}$
a_3	$\frac{2}{9\pi}$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}.$

Question 7. **Déduire que la somme partielle de Fourier d'ordre 3 est $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.**

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} a_n \cos(nt)$, puisque les coefficients b_n sont nuls. En remplaçant chaque coefficient par sa valeur obtenue précédemment, on trouve l'expression demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. **Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.**

La somme partielle s_3 est représentée par la courbe numéro 3.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Courbe numéro 3.

Question 9.a. **On pose $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$. Donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.**

En utilisant les coefficients exacts, on obtient $P = (3\pi/8)^2 + \frac{1}{2}[(2/\pi)^2 + (-1/\pi)^2 + (2/(9\pi))^2] = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$. L'arrondi au dix-millième donne $1,6437$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P \approx 1,6437$.

Question 9.b. **On note F la valeur efficace de f. Sachant que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2, choisir le pourcentage d'erreur correspondant parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est attendue, sans justification.**

0,1 %.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

0,1 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, dure 2 heures et a un coefficient de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ou de 2 en Électrotechnique. Ses deux exercices, notés chacun sur 10, évaluent la modélisation de la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et étude de fonction, puis l'exploitation des séries de Fourier d'une fonction paire périodique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les racines de l'équation caractéristique déterminent la forme de la solution générale d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.
- Si f'(t) < 0 sur un intervalle, f y est décroissante ; une limite finie en +∞ peut définir une asymptote horizontale.
- Pour une fonction paire de période T, les coefficients sinus b_n sont nuls et $a_n = (4/T)\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt$.
- La position moyenne sur [0 ; 4] est $m = (1/4)\int_0^4 f(t)dt$; l'algorithme augmente t jusqu'à ce que f(t) ne dépasse plus le seuil.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la distance initiale f(0) de la vitesse initiale f'(0), en respectant leurs unités.
- Vérifier le seuil strict f(t) < 0,5 cm et interpréter la valeur finale de t en secondes.
- Pour les coefficients de Fourier, tenir compte de la période, de la parité et des intervalles de définition de la fonction.
- Respecter les précisions demandées : valeurs exactes, arrondi au centième dans le tableau et approximation de P à 10^{-4} près.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution générale de l'équation différentielle du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses deux racines réelles distinctes donnent une solution générale de la forme $y(t) = C_1e^{r1t} + C_2e^{r2t}$. On détermine ensuite les constantes à partir des conditions initiales.

Q : Pourquoi les coefficients sinus de Fourier sont-ils nuls dans cet exercice ?

La fonction est paire et le sinus est impair. Leur produit est impair, donc son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle. Les coefficients b_n disparaissent ainsi du développement en série de Fourier.

Q : Comment suivre l'algorithme et savoir à quelle valeur il s'arrête ?

On part de t = 0 et on ajoute 0,1 tant que f(t) > 0,5. Le test est effectué avec la valeur courante de t. L'algorithme s'arrête lorsque cette condition devient fausse, et la valeur courante indique le temps recherché.

Q : Quelles précisions de calcul et consignes de réponse faut-il respecter ?

Le tableau de l'algorithme demande f(t) arrondie au centième et P doit être approché à 10^{-4} près. Les démonstrations doivent être justifiées. Pour le choix multiple sur l'erreur, une seule réponse est demandée, sans justification.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btspp.fr/assets/annales/bts-pp/E2 - Mathématiques/2023/BTS PP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Pilotage de Procédés : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.