Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **Non indiquée sur les pages fournies**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Refroidissement de l'eau d'un spa (12 questions) **Page 3**

2. Contrôles qualité et vente de farine dans une minoterie (12 questions) **Page 6**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btspp.fr/assets/annales/bts-pp/E2 - Mathématiques/2023/BTS PP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

1. Refroidissement de l’eau d’un spa

Après la coupure du chauffage, l’eau du spa, initialement à 38 °C, refroidit dans un environnement maintenu à 25 °C. Une équation différentielle modélise sa température et les questions portent sur son évolution, une alarme de température et un algorithme.

Partie A

Question 1. Déterminer les solutions de l’équation différentielle y' + 0,05y = 0 sur l’intervalle [0 ; +∞[.

L’équation s’écrit $y' = -0{,}05y$. Ses solutions sont les fonctions exponentielles $y(t) = Ce^{-0{,}05t}$, où C est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer une fonction constante solution particulière de l’équation différentielle y' + 0,05y = 1,25 sur [0 ; +∞[.

Pour une solution constante $y(t) = k$, on a $y' = 0$. L’équation donne $0{,}05k = 1{,}25$, donc $k = 1{,}25/0{,}05 = 25$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution particulière constante est $y(t) = 25$.

Question 3. En déduire les solutions de l’équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.

Les solutions de l’équation complète s’obtiennent en ajoutant une solution particulière aux solutions de l’équation homogène. On ajoute donc la constante 25 à la solution générale trouvée à la question 1.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t} + 25$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4. Montrer que, pour tout réel t de [0 ; +∞[, f(t) = 13e^(-0,05t) + 25.

La solution générale est $f(t) = Ce^{-0{,}05t} + 25$. Avec $f(0) = 38$, on obtient $C + 25 = 38$, donc $C = 13$. En remplaçant C, on trouve l’expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$.

Partie B

Question 1. Calculer f(24), arrondie au dixième, puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

On remplace t par 24 : $f(24) = 13e^{-0{,}05\times 24} + 25 \approx 28{,}9155$. Au dixième près, 24 heures après la coupure, l'eau du spa est à environ 28,9 °C.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Après 24 h, la température de l'eau est d'environ **28,9 °C**.

Question 2. a). Déterminer une expression de f'(t) pour tout réel t de [0 ; +∞[.

La dérivée de $13e^{-0{,}05t}$ est $13 \times (-0{,}05)e^{-0{,}05t}$, et la dérivée de la constante 25 est nulle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -0{,}65e^{-0{,}05t}$.

Question 2. b). En déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et argumenter pour dire si ce sens de variation est cohérent avec le contexte.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0{,}05t}$ est strictement positive. Ainsi, $f'(t) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. Ce résultat est cohérent : après la coupure du chauffage, l'eau du spa refroidit.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement décroissante, conformément au refroidissement de l'eau.

Question 3. a). Déterminer la limite de f en +∞.

Lorsque $t \to +\infty$, on a $-0{,}05t \to -\infty$, donc $e^{-0{,}05t} \to 0$. Par conséquent, dans $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$, seul le terme constant subsiste à la limite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 25$.

Question 3. b). Interpréter la limite obtenue dans le contexte de l'exercice.

À long terme, la température de l'eau se rapproche de 25 °C, soit la température ambiante constante autour du spa.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La température de l'eau tend vers la température ambiante : **25 °C**.

Question 4. a). L'alarme retentit lorsque la température devient strictement inférieure à la température programmée. Pour un réglage à 36 °C, déterminer par le calcul le temps écoulé après la coupure avant que l'alarme ne retentisse. Donner la durée exacte, puis son arrondi à la minute.

On cherche d'abord l'instant où l'eau atteint 36 °C : $13e^{-0{,}05t} + 25 = 36$, donc $e^{-0{,}05t} = 11/13$ et $t = 20\ln(13/11)$ heures. Cela correspond à environ 200,465 minutes, soit 3 h 20 min à la minute près. Comme l'alarme se déclenche lorsque la température devient strictement inférieure à 36 °C, elle retentit juste après cet instant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Durée exacte : $20\ln(13/11)$ h. Arrondie à la minute : **3 h 20 min**.

Question 4. b). Déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme fourni.

La boucle augmente H d'une heure et recalcule T tant que $T \geq 34$. À $H = 7$, $T \approx 34{,}161$, donc la boucle continue. À $H = 8$, $T \approx 33{,}714 < 34$, donc elle s'arrête et affiche $H = 8$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La valeur affichée est **8**.

Question 4. c). Expliquer ce que l'algorithme permet de déterminer dans le contexte de l'exercice.

L'algorithme teste les durées entières en heures et s'arrête dès que la température calculée est strictement inférieure à 34 °C. Il détermine donc le premier nombre entier d'heures après la coupure où ce seuil est franchi.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le premier nombre entier d'heures où la température passe sous 34 °C est **8 h**.

2. Contrôles qualité et vente de farine dans une minoterie

Une minoterie contrôle l'extensibilité de pâtes et le taux d'humidité de livraisons de blé, puis étudie la masse de ses sacs de farine. L'exercice examine aussi l'acceptation d'une nouvelle farine par différents clients et le nombre de clients qui l'ont testée.

Partie A

Question 1. a). À partir des indices d'extensibilité des cinq échantillons, donner la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.

La moyenne est la somme des cinq mesures divisée par cinq. L'écart-type est la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts à cette moyenne : $\bar{x} = (104 + 81 + 83 + 57 + 55)/5 = 76$ mm, puis $\sigma = \sqrt{1660/5} = \sqrt{332} \approx 18,22$ mm.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 76 mm ; écart-type : 18,22 mm.

Question 1. b). En prenant l'écart-type de la série égal à 18 mm, vérifier que le technicien n'a pas besoin de tester cinq nouveaux échantillons. Le test est requis si au moins une valeur est hors de l'intervalle [x̄ - 2σ ; x̄ + 2σ].

Avec $\bar{x} = 76$ mm et $\sigma = 18$ mm, l'intervalle de contrôle est $[76 - 2 \times 18 ; 76 + 2 \times 18] = [40 ; 112]$ mm.

- Les mesures 104, 81 et 83 mm sont dans cet intervalle.
- Les mesures 57 et 55 mm y sont également.

Aucune valeur n'est hors de l'intervalle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Aucun nouveau test n'est nécessaire.

Question 2. Les deux camions contiennent respectivement 29 540 kg de blé à 12,4 % d'humidité et 14 540 kg à 14,1 %. Sachant que le cahier des charges exige un taux inférieur à 13 % dans un même silo, montrer que le technicien peut autoriser leur déchargement dans ce silo.

Camion	Masse (kg)	Humidité
1	29 540	12,4 %
2	14 540	14,1 %

La masse totale est $44\,080$ kg. Le taux moyen pondéré vaut $(29\,540 \times 12,4 + 14\,540 \times 14,1)/44\,080 \approx 12,961$ %. Comme il est inférieur à 13 %, le mélange respecte le cahier des charges.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Taux du mélange : environ 12,961 % ; déchargement commun autorisé.

Partie B

Question 1. La masse X d'un sac suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'un sac prélevé au hasard ait une masse inférieure à 25 kg.

On centre et réduit la variable : $Z = (X - 25,2)/0,1$. Pour $X = 25$, on obtient $Z = -2$. Ainsi, $P(X < 25) = P(Z < -2) \approx 0,02275$, soit $0,023$ au millième près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X < 25) \approx 0,023$.

Question 2. a). Donner un réel h tel que P(25,2 - h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit approximativement égal à 0,95, à 10^{-2} près.

1. Pour une loi normale, environ 95 % des valeurs sont à moins de $1,96$ écart-type de la moyenne.
2. Donc $h = 1,96 \times 0,1 = 0,196$ kg, soit $0,20$ kg au centième près.

Avec cette valeur arrondie, l'intervalle est $[25,00 ; 25,40]$ kg et sa probabilité est environ $0,9545$, soit $0,95$ au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Un choix convenable est $h = 0,20$ kg.

Question 2. b). À partir de la représentation graphique fournie, expliquer pourquoi la fonction représentée ne peut pas être la fonction de densité de la variable aléatoire X.

Avec un écart-type de $0,1$ kg, environ 95 % des masses doivent se trouver entre $25,2 - 1,96 \times 0,1$ et $25,2 + 1,96 \times 0,1$, soit environ 25,00 et 25,40 kg. Or le graphique montre une courbe étalée sur plusieurs kilogrammes autour de 25,2 kg : sa dispersion est incompatible avec l'écart-type annoncé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

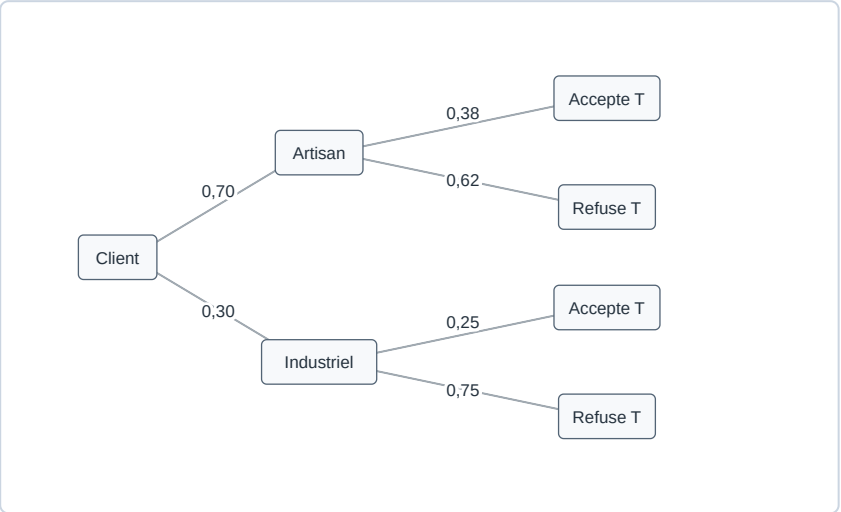
La courbe est trop étalée : environ 95 % des masses devraient être entre 25,00 et 25,40 kg.

Partie C

Question 1. Représenter la situation concernant le type de client et l'acceptation de tester la farine La Romaine à l'aide d'un arbre pondéré.

On note A l'événement « le client est artisan boulanger » et T l'événement « il accepte de tester La Romaine ». Les probabilités de refus sont les complémentaires des probabilités d'acceptation.

Type de client et test de La Romaine



Les probabilités de refus sont obtenues par complément à 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Artisan : 0,70 ; industriel : 0,30. Acceptation : 0,38 et 0,25 ; refus : 0,62 et 0,75.

Question 2. a). Calculer la probabilité que le client soit un artisan boulanger et accepte de tester la farine La Romaine.

La probabilité que le client soit artisan et accepte le test est le produit de la probabilité d'être artisan par la probabilité conditionnelle d'accepter parmi les artisans : $P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T) = 0,70 \times 0,38 = 0,266$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A \cap T) = 0,266$.

Question 2. b). Montrer que la probabilité qu'un client accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.

Les deux types de clients forment une partition. Les probabilités des chemins aboutissant à une acceptation sont :

Type	Calcul	Probabilité
Artisan	0,70 × 0,38	0,266
Industriel	0,30 × 0,25	0,075

Donc $P(T) = 0,266 + 0,075 = 0,341$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T) = 0,341$.

Question 3. Sachant qu'un client a testé la farine La Romaine, calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il soit un artisan boulanger.

Par définition, $P_T(A) = P(A \cap T)/P(T)$. Les probabilités sont $P(A \cap T) = 0,266$ et $P(T) = 0,341$. Ainsi, $P_T(A) = 0,266/0,341 \approx 0,7801$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(A) \approx 0,780$, au millième près.

Question 4. a). Y suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au plus 60 des 200 clients choisis aient testé la farine La Romaine.

« Au plus 60 » signifie $Y \leq 60$. Pour $Y \sim \mathcal{B}(200; 0,341)$, on additionne les probabilités des valeurs de 0 à 60 :

$$P(Y \leq 60) = \sum_{k=0}^{60} \binom{200}{k} (0,341)^k (0,659)^{200-k} \approx 0,1249.$$

Au millième près, cette probabilité vaut 0,125.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 60) \approx 0,125$.

Question 4. b). Calculer l'espérance de Y et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

1. L'espérance d'une loi binomiale est $E(Y) = np$.
2. Donc $E(Y) = 200 \times 0,341 = 68,2$.

Sur un grand nombre d'échantillons de 200 clients, on comptera en moyenne 68,2 clients ayant testé la farine.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(Y) = 68,2$ testeurs en moyenne par échantillon de 200 clients.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, code 23MATGRD1. La durée et le coefficient ne sont pas indiqués sur les pages fournies. Les deux exercices étudient le refroidissement de l'eau d'un spa et les contrôles et ventes d'une minoterie. Ils évaluent équations différentielles, algorithmes, statistiques, lois normale et binomiale, ainsi que probabilités conditionnelles.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, une solution constante particulière vaut b/a lorsque a est non nul.
- Dans f(t) = 13e^(-0,05t) + 25, la température tend vers la température ambiante de 25 °C.
- Le taux d'humidité d'un mélange se calcule en pondérant chaque taux par la masse correspondante.
- Si Y suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors son espérance vaut E(Y) = np.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités et l'arrondi demandé, notamment pour les probabilités et la durée en minutes.
- Comparer chaque valeur mesurée aux deux bornes de l'intervalle [$\bar{x}$ - 2σ ; $\bar{x}$ + 2σ].
- Pour un mélange, pondérer les taux d'humidité par les masses avant de comparer au seuil de 13 %.
- Distinguer probabilités conditionnelles et probabilités d'intersection dans l'arbre pondéré.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution particulière constante de l'équation différentielle du spa ?

On cherche une solution constante y = c, donc y' = 0. L'équation devient 0,05c = 1,25, d'où c = 25. Cette constante correspond à la température ambiante vers laquelle tend la température de l'eau.

Q : Comment calculer le taux d'humidité après le mélange des deux livraisons ?

Multipliez la masse de chaque camion par son taux d'humidité pour obtenir la masse d'eau correspondante. Additionnez ces masses d'eau, puis divisez par la masse totale de blé. Comparez le taux obtenu au seuil de 13 %.

Q : Comment calculer l'espérance du nombre de clients ayant testé la farine ?

Y suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Son espérance est np, soit 68,2. Cela représente le nombre moyen de clients ayant testé la farine dans des groupes de 200 clients.

Q : Que faut-il montrer pour justifier une réponse en probabilités ?

Précisez l'événement étudié et appliquez la formule adaptée aux données de l'arbre ou à la loi indiquée. Présentez les calculs utiles, respectez l'arrondi demandé et ajoutez une interprétation lorsque la consigne le demande.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btspp.fr/assets/annales/bts-pp/E2 - Mathématiques/2023/BTS PP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Pilotage de Procédés : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.